15/04/19

$A = A^t \Rightarrow$ ιδιοτιμές πραγματικές

$\Downarrow$ διαφορετικές ιδιοτιμές - κάθετα ιδιοδιανύσματα

• **Φασματικό θεώρημα για πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες**

Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια όμοιος με έναν διαγώνιο. $\exists P$ ορθογώνιος και Λ διαγώνιος $A = P\Lambda P^t \Rightarrow$

$\Rightarrow A = A^t = (P\Lambda P^t)^t = P\Lambda P^t = A$

πχ: 1) ΝΔΟ ο πίνακας $I - vv^t$ διαγωνοποιείται για $v \in M(n \times n, \mathbb{R})$

v είναι $n \times n \Rightarrow v^t$ είναι $1 \times n$ κ' vv^t είναι $n \times n$. $I - vv^t$ είναι $n \times n$ $(I - vv^t)^t = I^t - (vv^t)^t = I - vv^t \Rightarrow I - vv^t$ είναι πραγματικός συμμετρικός $\Rightarrow$ διαγωνοποιείται.

2) ΝΔΟ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I - vv^t$ κ' να διαγωνοποιηθεί.

$$I - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = vv^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} (a \; \beta \; \gamma) =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & a\beta & a\gamma \\ \beta a & \beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma a & \gamma\beta & \gamma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 = a^2, & -1 = a\beta, & -1 = a\gamma \\ -1 = \beta a, & 1 = \beta^2, & 1 = \beta\gamma \\ -1 = \gamma a, & \gamma\beta = 1, & 1 = \gamma^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

• Αν $a = -1 \Rightarrow \beta = 1$ κ' $\gamma = 1$ επιτρέπεται.

• Αν $a = 1 \Rightarrow \beta = -1$ κ' $\gamma = -1$ -||-. Άρα $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\qquad \chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&-1\\1&-1&-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda-1)\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=(\lambda-1)\det\begin{pmatrix}-\lambda+1&-\lambda+1&0\\1&-\lambda&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda-1)^2\det\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&-\lambda&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=(\lambda-1)^2\left[(-1)\det\begin{pmatrix}-\lambda&-1\\1&-1\end{pmatrix}-1\cdot\det\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=(\lambda-1)^2(-\lambda-1-1)=(\lambda-1)^2(-\lambda-2)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=1\\\lambda_3=-2\end{cases}$$

• $V(1)=\left(\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+y+z=0\\x-y-z=0\\x-y-z=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=y+z}$$

$(x,y,z)=(y+z,y,z)=y(1,1,0)+z(1,0,1)$

Άρα $V(1)=\langle\underbrace{(1,1,0)}_{u_1},\underbrace{(1,0,1)}_{u_2}\rangle$

$v_1=u_1=(1,1,0)$

$v_2=u_2-\dfrac{\langle u_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}\cdot v_1=(1,0,1)-\dfrac{1}{2}(1,1,0)=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)\to$

$\Rightarrow(1,-1,2)$

ς' άρα $\boxed{V(1)=\left\langle\left(\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2},0\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{-1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right)\right\rangle}$

• $V(-2)$: $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+y+z=0\\x+2y-z=0\\x-y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=x+2y\\y=-x\\z=-x\end{cases}$

$\cancel{(x,y,z)=(-y,y,y)=y(-1,1,1)}$

$V(-2)=\langle(1,-1,-1)\rangle=\left\langle\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{-1}{\sqrt3},\dfrac{-1}{\sqrt3}\right)\right\rangle$

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt6&1/\sqrt3\\1/\sqrt2&-1/\sqrt6&-1/\sqrt3\\0&2/\sqrt6&-1/\sqrt3\end{pmatrix}\qquad\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

ΘΕΤΙΚΑ (ΜΗ-ΑΡΝΗΤΙΚΑ) ΟΡΙΣΜΕΝΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας A καλείται θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος, αν ισχύει $uAu^t > 0$ (≥ 0) για $\vec{u} \neq \vec{0}$

- **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω $T: V \to V$ ενδομορφισμός με V ευκλείδιο χώρο. Ο T θα καλείται συμμετρικός αν ισχύει $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$ $\forall\, u, v \in V$

  Ένας συμμετρικός ενδομορφισμός $T: V \to V$ θα καλείται θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος αν ισχύει $\langle T(u), u\rangle > 0$ (≥ 0) $\forall\, \vec{u} \neq \vec{0}$

- **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Ο πίνακας ενός συμμετρικού ενδομορφισμού ως προς ορθοκανονική βάση είναι συμμετρικός.

*Απόδειξη: $T: V^n \to V^n$; $\{u_1, \dots, u_n\}$ μια ορθοκανονική βάση. Ο πίνακας της T δίνεται από:

$T(u_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n = \sum_{t=1}^{n} a_{t1}u_t$, Άρα

$T(u_i) = \sum_{t=1}^{n} a_{ti}u_t$

$$A = (\text{στήλες οι συντελεστές}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Θέλω $A = A^t$, όταν $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$

$\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle \sum_{t=1}^{n} a_{ti}u_t, u_j\rangle = \sum_{t=1}^{n} a_{ti}\langle u_i, u_j\rangle$ (1)

Αν $t=j \Rightarrow \langle u_j, u_j\rangle = 1 \Rightarrow$ (1) a_{ji}

$t \neq j$ είναι μηδέν το $\langle u_t, u_j\rangle$

$\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, T(u_j)\rangle = \langle u_i, \sum_{t=1}^{n} a_{tj}u_t\rangle = \sum_{t=1}^{n} a_{tj}\langle u_i, u_t\rangle =$

$= \left\{ \begin{array}{l} t=j \Rightarrow \langle u_i, u_i\rangle = 1 \\ t \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_t\rangle = 0 \end{array} \right\} a_{ij}$ Δηλαδή $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ A συμμετρικός

- **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας A θα είναι θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος αν-ν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (μη-αρνητικές)

No. Date

*Απόδειξη: Α θετικά ορισμένος $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $uAu^t > 0$, $u \neq \vec{0}$. Από το φασματικό θεώρημα γνωρίζουμε ότι ο Α διαγωνοποιείται και οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Έστω $Au_i^t = \lambda_i u_i^t$, $u_i \neq \vec{0}$
(1) $\Rightarrow u_i A u_i^t = u_i(\lambda_i u_i^t)$ και $u_i A u_i^t > 0$. Άρα $\lambda_i u_i u_i^t > 0 \Rightarrow$
$\lambda_i \|u_i\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda_i > 0$

Αντίστροφα: Α διαγωνοποιείται και $\lambda_i > 0$. Επίσης υπάρχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων $\{u_1, \dots, u_n\}$. Θέλω $uAu^t > 0$.

$u = \sum a_i u_i \Rightarrow (\sum a_i u_i) A (\sum a_j u_j^t) = \sum_i a_i (u_i A (\sum_j a_j u_j^t)) =$
$= \sum_i \sum_j a_i a_j (u_i A u_j^t) = \sum_i \sum_j a_i a_j (u_i \lambda_j u_j^t) =$
$= \sum_i \sum_j \lambda_j a_i a_j \underbrace{(u_i u_j^t)}_{\langle u_i, u_j \rangle} = \underbrace{\sum_i \lambda_i a_i^2}_{\lambda_i > 0} > 0$

$\langle u_i, u_j \rangle$: 1 αν $i = j$, 0 αν $i \neq j$

Δηλαδή, $uAu^t > 0$ και ο Α είναι θετικά ορισμένος.

• **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Ο Α είναι θετικά ορισμένος αν ισχύει ένα από τα:

α) υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R ώστε $A = RR^t$ $\left(A = A^t = (RR^t)^t = RR^t\right)$

β) Αν $A = (a_{ij})$ πρέπει:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{11} > 0$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0$

$\vdots$

$\det A > 0$

Πχ 1) Να υπολογιστεί το x ώστε ο Α να είναι θετικά ορισμένος

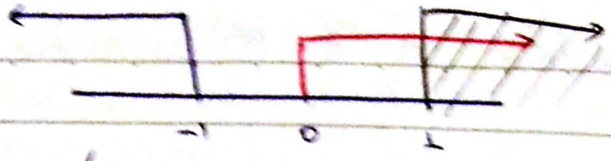
$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Α θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ $x > 0$, $\det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} > 0$, $\det A > 0$

No. Date

$x>0$

$x^2-1>0$



$$\det A=\det\begin{pmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}x+2&1&1\\x+2&x&1\\x+2&1&x\end{pmatrix}=(x+2)\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{pmatrix}=$$

$$=(x+2)\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&x-1&0\\0&0&x-1\end{pmatrix}=(x+2)(x-1)^2>0$$ Άρα $x>-2$ ϗ $x\neq 1$ ϗ $x>0$

Άρα για $x\in(1,+\infty) \Rightarrow A$ θετικά ορισμένος.

2) Να υπολογιστεί το α ώστε ο πίνακας A να είναι θετικά ορισμένος

$$A=\begin{pmatrix}2&2&4\\2&\alpha&8\\4&8&\alpha\end{pmatrix}$$

Πρέπει $2>0$, $\det\begin{pmatrix}2&2\\2&\alpha\end{pmatrix}>0$ ϗ $\det A>0$

$\det\begin{pmatrix}2&2\\2&\alpha\end{pmatrix}=2\alpha-4=2(\alpha-2)>0$ άρα $\boxed{\alpha>2}$

$$\det A=\det\begin{pmatrix}2&2&4\\2&\alpha&8\\4&8&\alpha\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}1&1&2\\0&\alpha-2&4\\0&4&\alpha-8\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}\alpha-2&4\\4&\alpha-8\end{pmatrix}$$

$=4[(\alpha-2)(\alpha-8)-16]=4(\alpha^2-10\alpha+16-16)=4(\alpha^2-10\alpha)=$

$=4\alpha(\alpha-10)>0$ άρα $\boxed{\alpha>10}$ ϗ $\boxed{\alpha>0}$

Άρα τελικά $\alpha>10$